3. Τοπολογία Μετρικών Χώρων

Άσκηση 1.

Έστω μετρικοί χώροι (X_i, ρ_i), $i = 1, 2, \dots, k$, θεωρούμε το σύνολο $X := \prod_{i=1}^{n} X_i$ και το εφοδιάζουμε με την απεικόνιση $\rho \colon X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\rho(x, y) := \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i),\ \ x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in X.$$

(i) Αποδείξτε ότι η ρ είναι μία μετρική επί του X.

(ii) Έστω $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in X$. Να αποδείξετε ότι:

(a) $\prod_{i=1}^{k} B_{\rho_i}(\alpha_i, \frac{r}{k}) \subset B_\rho(\alpha, r),\ \ r > 0.$

(b) $B_\rho(\alpha, r) \subset \prod_{i=1}^{k} B_{\rho_i}(\alpha_i, r_i),\ \ r := \min\{r_1, \dots, r_k\} > 0.$

(iii) Έστω $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2, \dots k$. Να αποδείξετε ότι:

(a) $\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right)^o = \prod_{i=1}^{k} A_i^o.$

(b) $\overline{\prod_{i=1}^{k} A_i} = \prod_{i=1}^{k} \overline{A_i}.$

Άσκηση 2.
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $A, B \subset X$, η απόσταση των δύο συνόλων ορίζεται ως $\rho(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

(i) Να αποδείξετε ότι $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

(ii) Αν $A \subset B \subset \bar{A}$, να αποδείξετε ότι $\rho(x, A) = \rho(x, B)$, για κάθε $x \in X$.

(iii) Δώστε παράδειγμα δύο κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B ενός μετρικού χώρου (X, ρ) τα οποία έχουν μηδενική απόσταση.

Άσκηση 3.
Έστω μια αρίθμιση των ρητών $\{q_1, q_2, \dots\}$. Ορίζουμε την ακολουθία διαστημάτων

$$I_n := \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n}\right),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4.
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Να αποδείξετε τους παρακάτω ισχυρισμούς.

(i) Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{A} = \overline{D \cap A}$ για κάθε A ανοιχτό υποσύνολο του X.

(ii) Αν A, B ανοιχτά και πυκνά υποσύνολα του X, τότε το $A \cap B$ είναι (ανοιχτό και) πυκνό υποσύνολο του X.

(iii) Αν C, D κλειστά υποσύνολα του X με $C^o = \emptyset$ και $D^o = \emptyset$, τότε $(C \cup D)^o = \emptyset$.

Άσκηση 5.
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Να αποδείξετε ότι

(i) για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν ανοιχτά και ξένα U_1, U_2 υποσύνολα του X τέτοια, ώστε $x \in U_1$ και $y \in U_2$.

(ii) για κάθε διαφορετικά ανά δύο $x_1, x_2, \dots x_n$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν ανοιχτά και ξένα ανά δύο $U_1, U_2, \dots U_n$ υποσύνολα του X τέτοια, ώστε $x_i \in U_i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Άσκηση 6.
Να εξετάσετε αν το σύνολο

(i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^3$ με την ευκλείδεια μετρική.

(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y + 3x = 1\}$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική.

(iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ είναι κλειστό ή ανοιχτό στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική.

(iv) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική.

(iv) $E = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\}$ είναι κλειστό ή ανοιχτό στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική.

(v) $F = [0, 1] \cup \{2\} \cup ([4, 5) \setminus \{3\})$ είναι κλειστό ή ανοιχτό στον $\mathbb{R}$ με την διακριτή μετρική.

(vi) $\mathbb{N}$ είναι κλειστό ή ανοιχτό στον υπόχωρο $\mathbb{Z}$ του $\mathbb{R}$ (με την σχετική ευκλείδεια μετρική).

(vii) $G = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική.

Άσκηση 7.
Να βρείτε τα εσωτερικά σημεία, τα σημεία επαφής, τα σημεία συσσώρευσης και τα συνοριακά σημεία των παρακάτω συνόλων, στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική.

(i) $A = (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$.

(ii) $B = \mathbb{Q}^2$.

(iii) $C = (-1, 1) \cup \{2\} \cup [3, 4)$.

(iv) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y \leq 2\}$.

(v) $E = \{\left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) : n \in \mathbb{N}\}$.

(vi) $F = \mathbb{R} \times \{0\}$.

(vii) $G = B_{\rho_2}((0, 0), 1) \cup ([0, k] \times \{0\})$, όπου k το έτος γένησης σας.

Άσκηση 8.
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Να αποδείξετε ότι

(i) αν $A \subset X$, τότε το σύνολο ∂A, των συνοριακών σημείων του A είναι κλειστό σύνολο και ότι $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

(ii) A είναι ένα ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνο αν $\partial A = \emptyset$.

(iii) αν A, B είναι υποσύνολα του X, τέτοια, ώστε $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, τότε $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

(iv) Να δώσετε παράδειγμα συνόλου A σ' ένα μετρικό χώρο, για το οποίο ισχύει

$$\partial A \neq \partial \bar{A} \neq \partial A^o \neq \partial A.$$

(v) Να δώσετε παράδειγμα συνόλου A σ' ένα μετρικό χώρο, για το οποίο ισχύει $\partial(\partial A) \subsetneq \partial A$.

Άσκηση 9.
Έστω μετρικός χώρος (X, ρ) και $A \subset X$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης του A είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Άσκηση 10.

(i) Ας είναι δύο συνεχείς απεικονίσεις $f, g\colon (X, d_1) \to (Y, d_2)$ και ένα πυκνό $A \subset X$. Αν $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in A$, να αποδείξετε ότι $f = g$, παντού στον X.

(ii) Ας είναι μια συνεχής και επί απεικόνιση $f\colon (X, d_1) \to (Y, d_2)$ και ένα πυκνό $A \subset X$. Να αποδείξετε ότι το $f(A)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

Υποδείξεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

(i) Εύκολα εξετάζει κανείς τις τρεις προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί μια μετρική και έτσι έπεται άμεσα το ζητούμενο.

(ii) Για την απόδειξη των (a),(b) στηριζόμαστε σε συνολοθεωρητικές τεχνικές. Συγκεκριμένα, παίρνουμε ένα τυχόν στοιχείο x στο σύνολο αριστερά και στηριζόμενοι στον τρόπο που ορίστηκε η παραπάνω μετρική, αποδεικνύουμε ότι το x ανήκει στο σύνολο δεξιά..

(iii) Ενδεικτικά κάνουμε το (a) και ανάλογα κανείς με χρήση της (ii) και του ορισμού της κλειστής θήκης αποδεικνύει και τη (b). Έστω $x = (x_1, \dots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} A_i^o$. Τότε, $x_i \in A_i^o$, για κάθε $i = 1, 2 \dots, k$, δηλαδή, υπάρχει $r_i > 0$ τέτοιο, ώστε $B_{\rho_i}(x_i, r_i) \subset A_i$. Επομένως, από το (ii), (b) συνάγουμε ότι:

$$B_\rho(x, r) \subset \prod_{i=1}^{k} B_{\rho_i}(x_i, r_i) \subset \prod_{i=1}^{k} A_i,$$

όπου $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$. Άρα, $x \in \left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right)^o$. Από την άλλη μεριά, ας είναι τυχόν $x = (x_1, \dots, x_k) \in \left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right)^o$. Τότε, υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_\rho(x, r) \subset \prod_{i=1}^{k} A_i$. Επομένως, από το (ii), (a) συνάγουμε ότι:

$$\prod_{i=1}^{k} B_{\rho_i}(x_i, \frac{r}{k}) \subset \prod_{i=1}^{k} A_i.$$

Οπότε, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ ισχύει:

$$B_{\rho_i}(x_i, \frac{r}{k}) \subset A_i,$$

και άρα $x_i \in A_i^o$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Συνεπώς, $x \in \prod_{i=1}^{k} A_i^o$

Άσκηση 2

(i) Ενδεικτικά αποδεικνύουμε την ισότητα $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, B)$ και η άλλη αποδεικνύεται ομοίως. Εφόσον $A \times B \subset \bar{A} \times B$ και αφού το infimum είναι μία φθίνουσα συνολοθεωρητική συνάρτηση από τον ορισμό της απόστασης γίνεται σαφές ότι $\rho(\bar{A}, B) \leq \rho(A, B)$. Από την άλλη μεριά θα αποδείξουμε ότι για τυχαίο $\varepsilon > 0$ ισχύει $\rho(A, B) \leq \rho(\bar{A}, B) + \varepsilon$. Έστω λοιπόν ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της $\rho(\bar{A}, B)$ και την θεμελιώδη ιδιότητα του infimum, υπάρχει $(x, y) \in \bar{A} \times B$ ώστε

$$\rho(x, y) \leq \rho(\bar{A}, B) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Επειδή, $x \in \bar{A}$, υπάρχει $z \in A$ με

$$\rho(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Απ' τις σχέσεις (1), (2), τον ορισμό της $\rho(A, B)$ και την τριγωνική ανισότητα, έπεται:

$$\rho(A, B) \leq \rho(y, z) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z) < \rho(\bar{A}, B) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \rho(\bar{A}, B) + \varepsilon$$

(ii) Έστω $x \in X$. Αφού $A \subset B \subset \bar{A}$ είναι σαφές ότι $\rho(x, \bar{A}) \leq \rho(x, B) \leq \rho(x, A)$. Δεδομένου ότι $\rho(x, \bar{A}) = \rho(x, A)$ έπεται άμεσα το ζητούμενο.

(iii) Δύο κλειστά σύνολα (δείξτε το με την πρόταση που χαρακτηρίζει τα κλειστά σύνολα με τη βοήθεια ακολουθιών) στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική, είναι τα εξής

$$A = \{(x, 1/x) : x > 0\} \quad \& \quad B = \{(x, 0) : x > 0\}.$$

Μάλιστα, $\rho_2(A, B) \leq \|(x, 1/x) - (x, 0)\|_2 = \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$. Όποτε, παίρνοντας το όριο στην προηγούμενη ανισότητα για $x \to +\infty$ έπεται ότι η απόσταση των δύο συνόλων είναι μηδέν.

Άσκηση 3

Αρχικά, U ανοιχτό ως ένωση ανοιχτών συνόλων. Εφόσον το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q} \subset U$, το U πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4

(i) Αρχικά $A \cap D \subset A$. Οπότε, $\overline{A \cap D} \subset \bar{A}$. Από την άλλη μεριά έστω $x \in \overline{A \cap D}$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Εφόσον, το $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A$ είναι ανοιχτό (ως τομή ανοιχτών) στον X, και D πυκνό, προκύπτει ότι $D \cap (B_\rho(x, \varepsilon) \cap A) = B_\rho(x, \varepsilon) \cap (A \cap D) \neq \emptyset$, από το οποίο πηγάζει ότι $x \in \overline{A \cap D}$.

(ii) Εφόσον B πυκνό στον X, τότε για κάθε μη κενό και ανοιχτό σύνολο G στον X ισχύει $B \cap G \neq \emptyset$. Τώρα από το γεγονός ότι $B \cap G$ ανοιχτό στον X και καθώς το A είναι πυκνό στον X συνάγουμε ότι $A \cap (B \cap G) \neq \emptyset$. Οπότε, $A \cap B$ πυκνό στον X.

(iii) Θα αποδείξουμε ότι $(C\cup D)^o=\emptyset$, ή ισοδύναμα ότι $X\setminus(C\cup D)^o=X$, ή ισοδύναμα ότι $\overline{X\setminus(C\cup D)}=X$, ή ισοδύναμα ότι $\overline{(X\setminus C)\cap(X\setminus D)}=X$, ή ισοδύναμα ότι το σύνολο $(X\setminus C)\cap(X\setminus D)$ είναι πυκνό στον X. Αυτό είναι άμεσο από το (ii) και το γεγονός ότι από την υπόθεση της (iii) τα σύνολα $(X\setminus C)$ και $(X\setminus D)$ είναι πυκνά στον X.

Άσκηση 5

(i) Φανερά δύο τέτοια σύνολα είναι δύο ανοιχτές μπάλες με κέντρα τα x και y, αντίστοιχα και ακτίνες ίσες μεταξύ τους και ίσες με τον αριθμό $\varepsilon:=\frac{\rho(x,y)}{2}>0$.

(ii) Γενικεύοντας την (i) αρκεί να «μετρήσουμε» το πόσο απέχει κάθε x_i από κάθε x_j, για κάθε $i\neq j$ και να επιλέξουμε την μικρότερη αυτών των αποστάσεων δια 2, δηλαδή να θέσουμε $\varepsilon:=\left\{\frac{\rho(x_i,x_j)}{2}:i,j\in\{1,2,\dots,n\},j\neq i\right\}$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\forall\ i\neq j,\ B_\rho(x_i,\varepsilon)\cap B_\rho(x_j,\varepsilon)=\emptyset.$$

Άσκηση 6

Τα σύνολα A,B,D είναι κλειστά και αυτό μπορείτε να το αποδείξετε παίρνοντας μια τυχαία ακολουθία μέσα σε καθένα απο αυτά η οποία συγκλίνει, και να αποδείξετε ότι και το όριο αυτής θα κείται στο αντίστοιχο σύνολο. Επίσης, το F είναι και κλειστό και ανοιχτό ως υποσύνολο του διακριτού μετρικού χώρου $\mathbb{R}$. Επίσης, το $\mathbb{N}$ είναι αμοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα, γιατί $int_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N})=\mathbb{N}$ και $cl_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N})=cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}$, όπου int και cl το εσωτερικό και η κλειστή θήκη, αντίστοιχα στο $\mathbb{Z}$. Το σύνολο C δεν είναι κλειστό (επιλέξτε πχ την ακολουθία $(0,1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλινει προς το $(0,0)$ το οποίο δεν ανήκει στο C), αλλά είναι ανοιχτό καθώς το συμπλήρωμα του είναι κλειστό (ομοίως με τα τρία πρώτα σύνολα). Επίσης, το σύνολο F δεν είναι ανοιχτό καθώς το συμπλήρωμά του δεν είναι κλειστό (επιλέξτε πχ την ακολουθία $(3/2,1-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει προς το $(3/2,1)$ το οποίο δεν ανήκει στο συμπλήρωμα του F. Τέλος, το G όχι κλειστό (επιλέξτε πχ την ακολουθία $(1/n,0)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλινει προς το σημείο $(0,0)$ το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο G).

Άσκηση 7

(i) $A^o=\emptyset,\ \overline{A}=A'=(0,+\infty),\ \partial A=\overline{A}\setminus A^o=(0,+\infty)$.

(ii) $B^o=\emptyset,\overline{B}=B'=\mathbb{R}^2,\ \partial B=\overline{B}\setminus B^o=\mathbb{R}^2$.

(iii) $C^o=(-1,1)\cup(3,4),\overline{C}=[-1,1]\cup\{2\}\cup[3,4],C'=[-1,1]\cup[3,4],\ \partial C=\{-1,1,2,3,4\}$.

(iv) $D^o=D,\overline{D}=D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leq x+y\leq 2\}$, και το σύνολο των συνοριακών σημείων είναι το $\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=2\}\cup\{(0,0)\}$.

(v) $E^o=\emptyset,\overline{E}=E\cup\{(0,0)\},E'=\{(0,0)\},\partial E=\overline{E}$.

(vi) $F^o=\emptyset,\overline{F}=F'=\partial F$.

(vii) $G^o=B_{\rho_2}((0,0),1),\overline{G}=G'=\underbrace{\overline{B_{\rho_2}}((0,0),1)}_{=\hat{B}_{\rho_2}((0,0),1)}\cup([0,k]\times\{0\})$, και συνοριακά σημεία τα εξής

$$\partial G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}\cup((1,k]\times\{0\}).$$

Άσκηση 8

(i) Από τον ορισμό των συνοριακών σημείων έπεται ότι $\partial A = \overline{A} \setminus A^o = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, και άρα κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων. Επίσης, $\partial(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A} = \partial A$.

(ii) Προφανώς αν $A = A^o = \bar{A}$, ισχύει $\partial A = \emptyset$. Από την άλλη μεριά αν $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = \emptyset$, τότε $\bar{A} \subset A^o$ και τελικά $A = A^o = \bar{A}$.

(iii) Έστω $x \in \partial A$. Οπότε, $x \in \bar{A}$, και άρα από την υπόθεση $x \notin \bar{B}$. Οπότε, υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $B(x, r_0) \cap \bar{B} = \emptyset$. Άρα, για κάθε r τέτοιο, ώστε $0 < r < r_0$, έχουμε:

(a) $B(x, r) \cap A = \emptyset$ και κατά συνέπεια $B(x, r) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$.

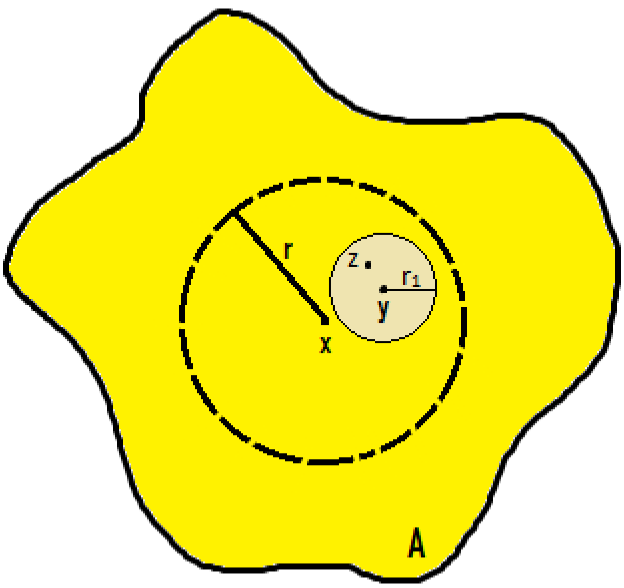
(b) υπάρχει $y \in B(x, r)$ και $y \notin A$. Επίσης, $y \notin B$, γιατί $B(x, r) \cap \bar{B} = \emptyset$. Οπότε, $y \notin A \cup B$, και συνεπώς $B(x, r) \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$.

Παρατηρώντας ότι (a),(b) θα ικανοποιούνται και για κάθε μπάλα με μεγαλύερη ακτίνα από την r έχουμε ότι $x \in \partial(A \cup B)$. Ομοίως, εξετάζει κανείς την περίπτωση για τυχόν $x \in \partial B$. Αντίστροφα, έστω $x \in \partial(A \cup B)$. Οπότε, $x \in \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Υποθέτουμε ότι το $x \in \bar{A}$ και η περίπτωση που το $x \in \bar{B}$ εξετάζεται ανάλογα. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ανοιχτή μπάλα $B(x, r)$, αυτή πληροί τις σχέσεις $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Ο τρόπος που θα το αποδεικνύει κανείς αυτό είναι ανάλογος με αυτόν του προηγούμενου εγκλεισμού και για αυτό αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

(iv − v) Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το σύνολο $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ στον $\mathbb{R}$ με την ευκλείδεια μετρική (διαπιστώστε το).

Άσκηση 9

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\overline{A'} \subset A'$. Έστω λοιπόν $x \in \overline{A'}$, τυχαίο $r > 0$ και θα αποδείξουμε ότι $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, δηλαδή ότι υπάρχει $z \in B(x, r) \setminus \{x\}$ και $z \in A$. Εφόσον $x \in \overline{A'}$ προκύπτει ότι $B(x, r) \cap A' \neq \emptyset$, και άρα επιλέγουμε ένα $y \in B(x, r)$ και $y \in A'$. Έστω ακόμη $B(x, r_1)$ μια ανοιχτή μπάλα τέτοια ώστε $B(y, r_1) \subset B(x, r)$ και μάλιστα $x \notin B(y, r_1)$ (αρκεί να ληφθεί $0 < r_1 < \epsilon$, όπου $\epsilon = \min\{r - \rho(x, y), \rho(x, y)\}$). Αφού $y \in A'$, υπάρχει $z \in A$ με $z \in B(y, \epsilon)$. Άρα, επειδή $B(y, r_1) \subset B(x, r)$ και $x \notin B(y, r_1)$ έχουμε το ζητούμενο.



Το σχήμα είναι ενδεικτικό.

Άσκηση 10

(i) Λόγω της πυκνότητας του A αρκεί αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in Q = \bar{A} : f(x) = g(x)$. Έστω λοιπόν $x \in \bar{A}$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A τέτοια, ώστε $x_n \to x$. Οπότε, $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ και με από την Αρχή της Μεταφοράς συνάγουμε ότι $f(x) = g(x)$.

(ii) Έστω $y \in Y$. Ούσα η f επί του Y, υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$. Θα αποδείξουμε ότι $y \in f(A)$, δηλαδή, ότι υπάρχει $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $f(A)$ τέτοια, ώστε $y_n \to y$. Εφόσον το A είναι πυκνό υποσύνολο του X, υπάρχει $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A τέτοια, ώστε $x_n \to x$ και έτσι από την Αρχή της Μεταφοράς συνάγουμε ότι $f(x_n) \to f(x) = y$. Ουσιαστικά λοιπόν για $y_n := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, για κάποια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $x_n \to x$ έχουμε το ζητούμενο.